Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine
$$x^2 + ax - a = 0,$$
gdje je $a \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$. Dokazati da broj
$$\frac{x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1 + x_2}$$
ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje: Koristeći Vietove formule imamo da je $x_1 x_2 = -a$ i $x_1 + x_2 = -a$. Dalje, kako je
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$
to je $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2(-a) = a^2 + 2a$. Primijetimo da je tada
$$\frac{x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)}{x_1 + x_2} = \frac{-a(a^2 + 2a)}{-a} = a^2 + 2a.$$
Ostaje da se dokaže da $a^2 + 2a$ ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.
Za $a > 0$ važi $a^2 < a^2 + 2a < (a + 1)^2$, pa kako se $a^2 + 2a$ nalazi između dva uzastopna kvadrata, to je naše tvrđenje tačno. Za $a < -2$ važi $(a + 2)^2 < a^2 + 2a < (a + 1)^2$, pa istim rezonovanjem slijedi da $a^2 + 2a$ nije kvadrat prirodnog broja. Za $a = -2$ i $a = -1$ direktnom provjerom se uvjeravamo da $a^2 + 2a$ nije kvadrat prirodnog broja. $\square$

2. Neka su a, b, c, d realni brojevi različiti od nule takvi da važi
$$a + b + c + d = 0 \text{ i } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} = 2023.$$

Dokazati

$$abcd < 0.$$

Rješenje: Sređivanjem drugog izraza dobija se jednakost

$$2023abcd = cd + ad + ab + bc.$$

Odavde slijedi da je neophodno i dovoljno dokazati da je $cd + ad + ab + bc < 0$. Koristeći prvu jednakost imamo

$$2023abcd = d(c + a) + b(a + c) = (d + b)(a + c) = -(a + c)^2.$$

Očigledno, posljednji izraz je negativan zbog uslova zadatka $a, c \neq 0$. $\square$

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$ takva da važi: ako x-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x-koordinata preostalih tačaka i y-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y-koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

(a) Mogu li x i y-koordinate biti svi brojevi skupa

$$\{-1011, -1010, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 1010, 1011\}?$$

Koje koordinate ima tačka koju dobijemo ovim postupkom polazeći od tačke $(0, 0)$?

(b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x-koordinata nula i bar jedna tačka čija je y-koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

Rješenje:

(a) Svaka x-koordinata x_i neke tačke iz mreže se zamjenjuje sa zbirom svih ostalih x-koordinata x_k, $k \neq i$, odnosno sa zbirom svih x-koordinata umanjenim za x_i. Kako je očigledno zbir svih x-koordinata jednak nula, to se x-koordinata x_i fiksirane tačke zamijenjuje sa $-x_i$. Analogno i za y-koordinate. Dakle, tačka (x_i, y_j) se zamjenjuje tačkom $(-x_i, -y_j)$. Odnosno, mreža sa koordinatama iz skupa $\{-1011, -1010, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 1010, 1011\}$ je primjer mreže koja zadovoljava navedeni uslov.

Na osnovu prvog dijela odgovora, slijedi da se tačka $(0, 0)$ "zamjenjuje" sa istom tačkom.

(b) Tačke sa x-koordinatom x_j se zamjenjuju tačkom sa x-koordinatom $\sum_{i=1}^{2023} x_i - x_j$. Kako mreža ostaje ista, to je $\sum_{j=1}^{2023} x_j = 2022 \sum_{j=1}^{2023} x_j$, odnosno $\sum_{j=1}^{2023} x_j = 0$. Dakle, tačka sa x-koordinatom x_j se zamjenjuje tačkom sa x-koordinatom $-x_j$. Bez gubljenja opštosti, neka je

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2022} \leq x_{2023}.$$

Kako mreža nakon navedenog postupka ostaje ista to je

$$x_1 = -x_{2023},$$

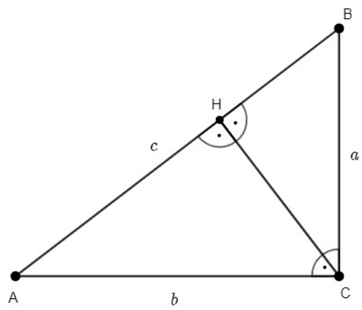
$$x_2 = -x_{2022},$$

$$\vdots$$

to jeste $x_k = -x_{2024-k}$. Specijalno $x_{1012} = -x_{1012}$, odnosno $x_{1012} = 0$. Analogno za y-koordinate. $\square$

4. U trouglu ABC sa pravim uglom kod tjemena C, neka H označava podnožje visine iz tjemena C na stranicu AB. Pokazati da je zbir poluprečnika upisanih kružnica u trouglove ABC, ACH i BCH jednak $|CH|$.

Rješenje: Neka je $s = \frac{a+b+c}{2}$ i r, r_1 i r_2 poluprečnici kružnica upisanih u trouglove ABC, ACH i BCH, redom.



Kako je CH visina na AB, to je $\angle AHC = 90°$, pa iz $\angle AHC = \angle ACB$ i $\angle HAC = \angle CAB$ slijedi $\Delta ACH \sim \Delta ABC$. Analogno, $\Delta CBH \sim \Delta ABC$.
Na osnovu navedenih sličnosti imamo

$$\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{r}{r_2} = \frac{c}{a},$$

odnosno

$$r_1 = r\frac{b}{c}, \qquad r_2 = r\frac{a}{c}.$$

Kako je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c},$$

dobijamo

$$r_1 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{b}{c}, \qquad r_2 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a}{c}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} r + r_1 + r_2 &= \frac{ab}{a+b+c}\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) \\ &= \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{ab}{c}. \end{aligned} \tag{1}$$

Konačno, iz sličnosti trouglova ACH i ABC imamo

$$\frac{b}{|CH|} = \frac{c}{a},$$

odnosno $|CH| = \frac{ab}{c}$, što zajedno sa (1) daje traženi rezultat. $\square$