Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Irfan je prije A godina imao pet puta više godina od njegove djece Emine i Damira zajedno. Za A godina, Irfan će imati duplo više godina od njegove djece zajedno. Ako je Emina sada duplo starija od Damira, a Damirov broj godina je uzajamno prost sa A, koliko godina može imati Irfan?

   Rješenje: Neka Irfan ima x godina, Emina y godina, a Damir z godina. Važe sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}&x - A = 5(y - A + z - A),\\&x + A = 2(y + A + z + A),\\&y = 2z,\\&\mathrm{nzd}(z, A) = 1.\end{aligned}$$

   Uvrštavanjem treće jednakosti u prvu i drugu dobijamo

$$\begin{cases} x - A = 5(3z - 2A),\\ x + A = 2(3z + 2A).\end{cases}$$

   Oduzimanjem posljednjih jednakosti imamo da je $9z = 12A$, odnosno $3z = 4A$. Jasno, kako $3 \mid 4A$ i $\mathrm{nzd}(3,4) = 1$, to $3 \mid A$, pa je $A = 3k$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada važi $z = 4k$, pa kako su z i A uzajamno prosti, to je $k = 1$, odnosno $z = 4$ i $A = 3$. Konačno, uvrštavanjem vrijednosti z i A imamo $x = 33$ i $y = 8$. Jednostavno se provjerava da su svi uslovi ispunjeni. $\square$

2. Neka su a, b, c realni brojevi različiti od nule za koje važi

$$a - b + c = 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2023.$$

   Dokazati da je $abc > 0$.

Rješenje: Sređivanjem drugog izraza dobija se jednakost

$$2023abc = bc - ac + ab.$$

Koristeći prvu jednakost imamo

$$2023abc = (a+c)c - ac + a(a+c) = a^2 + ac + c^2.$$

Odavde slijedi da je neophodno i dovoljno dokazati da je $a^2 + ac + c^2 > 0$. Zaista,

$$\begin{aligned} a^2 + ac + c^2 &= a^2 + 2a\frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4} \\ &= \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3c^2}{4}. \end{aligned}$$

Očigledno, posljednji izraz je pozitivan zbog uslova $a, c \neq 0$. $\square$

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$ takva da važi: ako x-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x-koordinata preostalih tačaka i y-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y-koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

(a) Ako su x i y-koordinate svi brojevi skupa

$$S = \{-1011, -1010, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 1010, 1011\},$$

koje koordinate ima tačka koju dobijemo ovim postupkom polazeći od tačke $(0,0)$?

(b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x-koordinata nula i bar jedna tačka čija je y-koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

Rješenje:

(a) Za tačku $(0,0)$ x-koordinata nove tačke je jednaka vrijednosti sume

$$-1011 + (-1010) + \ldots + (-2) + (-1) + 1 + 2 \ldots + 1010 + 1011,$$

što je očigledno nula.

Analogno za y-koordinatu. Dakle, navedenom procedurom tačka $(0,0)$ se "transformiše" u tačku $(0,0)$.

(b) Tačke sa x-koordinatom x_j se zamjenjuju tačkom sa x-koordinatom $\sum_{i=1}^{2023} x_i - x_j$. Kako mreža ostaje ista, to je $\sum_{j=1}^{2023} x_j = 2022 \sum_{j=1}^{2023} x_j$, odnosno $\sum_{j=1}^{2023} x_j = 0$. Dakle, tačka sa x-koordinatom x_j se zamjenjuje tačkom sa x-koordinatom $-x_j$. Bez gubljenja opštosti, neka je

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2022} \leq x_{2023}.$$

Kako mreža nakon navedenog postupka ostaje ista to je

$$x_1 = -x_{2023},$$

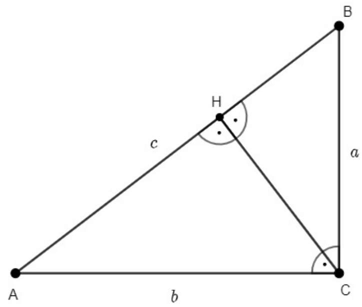
$$x_2 = -x_{2022},$$

$$\vdots$$

to jeste $x_k = -x_{2024-k}$. Specijalno $x_{1012} = -x_{1012}$, odnosno $x_{1012} = 0$. Analogno za y-koordinate. $\square$

4. U trouglu ABC sa pravim uglom kod tjemena C, neka H označava podnožje visine iz tjemena C na stranicu AB. Pokazati da je zbir poluprečnika upisanih kružnica u trouglove ABC, ACH i BCH jednak $|CH|$.

Rješenje: Neka je $s = \frac{a+b+c}{2}$ i r, r_1 i r_2 poluprečnici kružnica upisanih u trouglove ABC, ACH i BCH, redom.



Kako je CH visina na AB, to je $\angle AHC = 90°$, pa iz $\angle AHC = \angle ACB$ i $\angle HAC = \angle CAB$

slijedi $\Delta ACH \sim \Delta ABC$. Analogno, $\Delta CBH \sim \Delta ABC$.
Na osnovu navedenih sličnosti imamo

$$\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{r}{r_2} = \frac{c}{a},$$

odnosno

$$r_1 = r\frac{b}{c}, \qquad r_2 = r\frac{a}{c}.$$

Kako je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c},$$

dobijamo

$$r_1 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{b}{c}, \qquad r_2 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a}{c}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} r + r_1 + r_2 &= \frac{ab}{a+b+c}\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) \\ &= \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{ab}{c}. \end{aligned} \tag{1}$$

Konačno, iz sličnosti trouglova ACH i ABC imamo

$$\frac{b}{|CH|} = \frac{c}{a},$$

odnosno $|CH| = \frac{ab}{c}$, što zajedno sa (1) daje traženi rezultat. $\square$