Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi

$$54 \,\big|\, 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2.$$

Rješenje: Dokaz izvodimo indukcijom. Za $n = 1$ imamo $2^3 - 9 + 3 - 2 = 0$, pa kako $54|0$, to je tvrđenje tačno za $n = 1$. Neka je tvrđenje tačno za $n = k \geq 1$, tj. $54|\big(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2\big)$. Dokazujemo za $n = k + 1$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)+1} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 &= 42^{2k+1} - 9k^2 - 18k - 9 + 3k + 3 - 2 \\ &= 4(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) + 36k^2 - 12k + 8 \\ &- 9k^2 - 18k - 9 + 3k + 3 - 2 \\ &= 4(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) + 27k^2 - 27k \\ &= 4(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) + 27k(k-1) \end{aligned}$$

Izraz $2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2$ je djeljiv sa 54 na osnovu pretpostavke, dok kako je izraz $k(k-1)$ djeljiv sa 2 kao proizvod dva uzastopna broja, to je $27k(k-1)$ djeljiv sa 54. Dakle, tvrđenje je tačno i za $n = k + 1$. $\square$

2. Neka su $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ polinomi koji nijesu identički jednaki nuli, sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva. Ako važe jednakosti

$$P(x) + Q(x) + R(x) = P(Q(x)) + Q(R(x)) + R(P(x)) = 0,$$

dokazati da su svi ovi polinomi istog stepena i da je taj stepen paran broj.

Rješenje: Označimo sa n najveći od stepena polinoma P, Q i R. Neka su a, b i c koeficijenti uz x^n, u P, Q i R respektivno (neki od njih mogu biti jednaki 0).

Iz uslova dobijamo

$$a + b + c = 0, \quad \text{i} \quad ab^n + bc^n + ca^n = 0.$$

Zbog $P, Q, R \not\equiv 0$ i prve jednakosti bar dva od koeficijenata a, b i c su različita od nule. Ako bi tačno jedan od njih bio jednak nuli, onda druga jednakost ne bi važila. Dakle, sva tri su različita od 0, tj. P, Q i R su istog stepena.

Pretpostavimo da je n neparan broj.

Bar dva od brojeva a, b, c su istog znaka, pa ne gubeći na opštosti neka su a i b istog znaka i neka su pozitivni (množili bi s -1 ukoliko to nije slučaj, a jednakosti koje imamo i dalje bi važile). Tada je $c = -a - b < 0$.

Slijedi, $a, b > 0$, $a, b < |c|$, bc^n je negativan broj i ca^n je negativan broj, pa dobijamo

$$|bc^n + ca^n| > b|c|^n = |c| \cdot b \cdot |c|^{n-1} > a \cdot b \cdot b^{n-1} = ab^n,$$

što je u kontradikciji sa drugom jednakošću. $\square$

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$ takva da važi: ako x-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x-koordinata preostalih tačaka i y-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y-koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

   (a) Dati primjer skupa tačaka koji zadovoljava uslove zadatka.

   (b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x-koordinata nula i bar jedna tačka čija je y-koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

   Rješenje:
   (a) Neka je $S = \{-1011, -1010, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 1010, 1011\}$ i neka su x i y-koordinate naših tačaka brojevi iz skupa S. Svaka x-koordinata x_i neke tačke iz mreže se zamjenjuje sa zbirom svih ostalih x-koordinata x_k, $k \neq i$, odnosno sa zbirom svih x-koordinata umanjenim za x_i. Kako je očigledno zbir svih x-koordinata u slučaju datog skupa jednak nula, to se x-koordinata x_i fiksirane tačke zamjenjuje sa $-x_i$. Analogno i za y-koordinate. Dakle, tačka (x_i, y_j) se zamjenjuje tačkom $(-x_i, -y_j)$, pa mreža $S \times S$ je primjer mreže koja zadovoljava navedeni uslov.

   (b) Tačke sa x-koordinatom x_j se zamjenjuju tačkom sa x-koordinatom $\sum_{i=1}^{2023} x_i - x_j$. Kako mreža ostaje ista, to je $\sum_{j=1}^{2023} x_j = 2022 \sum_{j=1}^{2023} x_j$, odnosno $\sum_{j=1}^{2023} x_j = 0$. Dakle, tačka sa x koordinatom x_j se zamijenjuje tačkom sa x-koordinatom $-x_j$. Bez gubljenja opštosti, neka je

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2022} \leq x_{2023}.$$

Kako mreža nakon navedenog postupka ostaje ista to je

$$x_1 = -x_{2023},$$

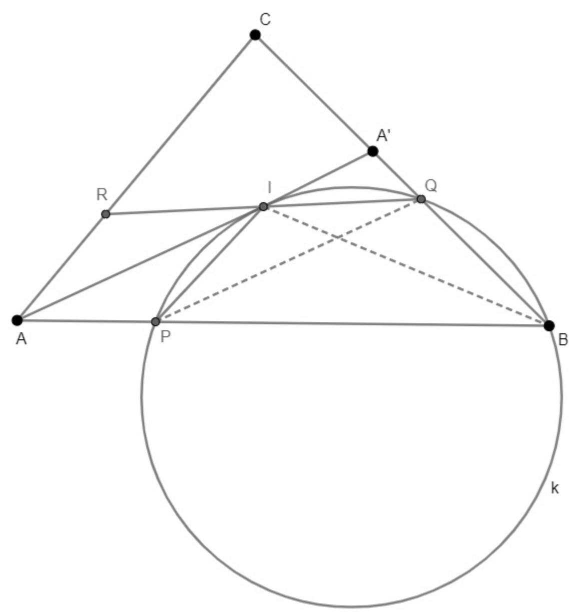
$$x_2 = -x_{2022},$$

$$\vdots$$

to jeste $x_k = -x_{2024-k}$. Specijalno $x_{1012} = -x_{1012}$, odnosno $x_{1012} = 0$. Analogno za y-koordinate. $\square$

4. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC. Neka je k kružnica koja sadrži tačke B i I, i AI je njena tangenta. Kružnica k siječe AB još u tački P i siječe BC još u tački Q. Prava QI siječe AC u tački R. Dokazati da je $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$.

Rješenje:



Važi sljedeći niz jednakosti uglova:

$$\begin{aligned}\angle AIP &= \angle IBP \quad \text{(ugao između tangente i tetive je jednak periferijskom uglu nad tetivom)}\\ &= \angle IBQ \quad (BI \text{ je bisektrisa ugla } \angle ABC)\\ &= \angle IPQ \quad \text{(kao periferijski uglovi nad tetivom } IQ).\end{aligned} \tag{1}$$

pa je $AI \parallel PQ$. To dalje povlači

$$\begin{aligned}\angle IAB &= \angle BPQ\\ &= \angle BIQ \quad \text{(kao periferijski uglovi nad tetivom } BQ).\end{aligned}$$

Kako je $\angle AIP = \angle IBQ$ i $\angle IAP = \angle BIQ$, to su trouglovi AIP i IBQ slični pa važi

$$\frac{|QI|}{|BQ|} = \frac{|AP|}{|PI|}. \tag{2}$$

Neka je $A' = p(A, I) \cap p(B, C)$. Tada

$$\begin{aligned}\angle RIA &= \angle QIA' \quad \text{(kao unakrsni uglovi)}\\ &= \angle IPQ \quad \text{(ugao između tangente i tetive je jednak periferijskom uglu nad tetivom)}\\ &= \angle AIP \quad \text{(na osnovu 1).}\end{aligned}$$

Kako je AI bisektrisa $\angle BAC$ to je i $\angle PAI = \angle RAI$, pa iz USU stava slijedi da je $\triangle AIP \cong \triangle AIR$, što povlači

$$|AR| = |AP|. \tag{3}$$

Takođe važi $|QI| = |PI|$, jer je BI bisektrisa ugla PBQ. Uvrštavajući dobijeno u (2) konačno dobijamo

$$\frac{|PI|}{|BQ|} = \frac{|AR|}{|PI|},$$

odakle slijedi tražena relacija. $\square$