

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

**OLIMPIJADA ZNANJA 2023**

Takmičenje iz MATEMATIKE  
za I razred srednje škole

1. Irfan je prije  $A$  godina imao pet puta više godina od njegove djece Emine i Damira zajedno. Za  $A$  godina, Irfan će imati duplo više godina od njegove djece zajedno. Ako je Emina sada duplo starija od Damira, a Damirov broj godina je uzajamno prost sa  $A$ , koliko godina može imati Irfan?

2. Neka su  $a, b, c$  realni brojevi različiti od nule za koje važi

$$a - b + c = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2023.$$

Dokazati da je  $abc > 0$ .

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2023\}$  takva da važi: ako  $x$ -koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom  $x$ -koordinata preostalih tačaka i  $y$ -koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom  $y$ -koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

(a) Ako su  $x$  i  $y$ -koordinate svi brojevi skupa

$$S = \{-1011, -1010, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 1010, 1011\},$$

koje koordinate ima tačka koju dobijemo ovim postupkom polazeći od tačke  $(0, 0)$ ?

(b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna  $x$ -koordinata nula i bar jedna tačka čija je  $y$ -koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

4. U trouglu  $ABC$  sa pravim uglom kod tjemena  $C$ , neka  $H$  označava podnožje visine iz tjemena  $C$  na stranicu  $AB$ . Pokazati da je zbir poluprečnika upisanih kružnica u trouglove  $ABC$ ,  $ACH$  i  $BCH$  jednak  $|CH|$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**