Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Takmičenje iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi

$$54 \mid 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2.$$

2. Neka su $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ polinomi koji nijesu identički jednaki nuli, sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva. Ako važe jednakosti

$$P(x) + Q(x) + R(x) = P(Q(x)) + Q(R(x)) + R(P(x)) = 0,$$

dokazati da su svi ovi polinomi istog stepena i da je taj stepen paran broj.

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$ takva da važi: ako x-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x-koordinata preostalih tačaka i y-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y-koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

   (a) Dati primjer skupa tačaka koji zadovoljava uslove zadatka.

   (b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x-koordinata nula i bar jedna tačka čija je y-koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

4. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC. Neka je k kružnica koja sadrži tačke B i I, i AI je njena tangenta. Kružnica k siječe AB još u tački P i siječe BC još u tački Q. Prava QI siječe AC u tački R. Dokazati da je $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$.

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.