

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Takmičenje iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine

$$x^2 + ax - a = 0,$$

gdje je $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Dokazati da broj

$$\frac{x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1 + x_2}$$

ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.

2. Neka su a, b, c, d realni brojevi različiti od nule takvi da važi

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} = 2023.$$

Dokazati

$$abcd < 0.$$

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j) , $i, j \in \{1, 2, \dots, 2023\}$ takva da važi: ako x -koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x -koordinata preostalih tačaka i y -koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y -koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

(a) Mogu li x i y -koordinate biti svi brojevi skupa

$$\{-1011, -1010, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 1010, 1011\}?$$

Koje koordinate ima tačka koju dobijemo ovim postupkom polazeći od tačke $(0, 0)$?

(b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x -koordinata nula i bar jedna tačka čija je y -koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

4. U trouglu ABC sa pravim uglom kod tjemena C , neka H označava podnožje visine iz tjemena C na stranicu AB . Pokazati da je zbir poluprečnika upisanih kružnica u trouglove ABC , ACH i BCH jednak $|CH|$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.