

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Takmičenje iz MATEMATIKE
za III razred srednje škole

1. Riješite nejednačinu

$$\log_2 \left(\sqrt{x^2 - 4x} + 3 \right) > \log_{1/2} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} \right) + 1.$$

2. Odrediti sve uređene trojke (a, b, n) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju jednakost

$$a! + b! = 2^n.$$

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j) , $i, j \in \{1, 2, \dots, 2023\}$ takva da važi: ako x -koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x -koordinata preostalih tačaka i y -koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y -koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

(a) Dati primjer skupa tačaka koji zadovoljava uslove zadatka.

(b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x -koordinata nula i bar jedna tačka čija je y -koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

4. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC . Neka je k kružnica koja sadrži tačke B i I , i AI je njena tangenta. Kružnica k siječe AB još u tački P i siječe BC još u tački Q . Prava QI siječe AC u tački R . Dokazati da je $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.