Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Riješite nejednačinu

$$\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right) > \log_{1/2}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1.$$

.

Rješenje: Primijetimo da je oblast definisanosti izraza određena sa:
$x^2-4x \geq 0$ i $x+1 \geq 0$, tj. $x \in [-1,0] \cup [4,+\infty)$. Koristeći poznata svojstva funkcije log, za x iz oblasti definisanosti imamo

$$\begin{aligned}
&\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3) > \log_{1/2}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1\\
\Longleftrightarrow\ &\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3) > -\log_2\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+\log_2 2\\
\Longleftrightarrow\ &\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3) > \log_2\left(\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}{2}\right)+\log_2 2\\
\Longleftrightarrow\ &\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3) > \log_2(\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1)\\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{x^2-4x}+3 > \sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1\\
\Longleftrightarrow\ &3 > \sqrt{x+1}+1\\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{x+1} < 2\\
\Longleftrightarrow\ &x < 3
\end{aligned}$$

Dakle, $x \in [-1,0]$. $\square$

2. Odrediti sve uređene trojke (a,b,n) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju jednakost

$$a!+b!=2^n.$$

Rješenje: Neka je $a \leq b$. Primijetimo da za $a \geq 3$, slijedi da je $a! + b!$ djeljivo sa 3 što nije moguće. Dalje,

$$2^n = b!\left(\frac{b!}{a!} + 1\right),$$

odakle slijedi da je ($b = a$) ili ($b = a + 1$, b neparan), jer u suprotnom izraz u zagradi je neparan broj, što nije moguće. Dakle, mogući su sljedeći slučajevi:

i) $a = b = 1$

Slijedi $2^n = 2$, odnosno $n = 1$. Dakle, $(a, b, n) = (1, 1, 1)$ je rješenje.

ii) $a = b = 2$

Slijedi $2^n = 4$, odnosno $n = 2$. Dakle, $(a, b, n) = (2, 2, 2)$ je rješenje.

iii) $a = 2$, $b = 3$

Slijedi $2^n = 2 + 6 = 8$, odnosno $n = 3$. Dakle, $(a, b, n) = (2, 3, 3)$ je rješenje. U slučaju $a > b$ dobili bismo da je $(a, b, n) = (3, 2, 3)$ rješenje.

Time smo odredili sva rješenja jednačine: $(a, b, n) \in \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 3)\}$. $\square$

3. U ravni je data mreža tačaka sa koordinatama (x_i, y_j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$ takva da važi: ako x-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom x-koordinata preostalih tačaka i y-koordinatu svake tačke zamijenimo zbirom y-koordinata preostalih tačaka, dobijemo istu mrežu tačaka.

   (a) Dati primjer skupa tačaka koji zadovoljava uslove zadatka.

   (b) Dokazati da postoji bar jedna tačka čija je jedna x-koordinata nula i bar jedna tačka čija je y-koordinata nula (za svaku mrežu koja zadovoljava uslove zadatka, ne samo za slučaj pod (a)!).

   Rješenje:

   (a) Neka je $S = \{-1011, -1010, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 1010, 1011\}$ i neka su x i y-koordinate naših tačaka brojevi iz skupa S. Svaka x-koordinata x_i neke tačke iz mreže se zamjenjuje sa zbirom svih ostalih x-koordinata x_k, $k \neq i$, odnosno sa zbirom svih x-koordinata umanjenim za x_i. Kako je očigledno zbir svih x-koordinata u slučaju datog skupa jednak nula, to se x-koordinata x_i fiksirane tačke zamjenjuje sa $-x_i$. Analogno i za y-koordinate. Dakle, tačka (x_i, y_j) se zamjenjuje tačkom $(-x_i, -y_j)$, pa mreža $S \times S$ je primjer mreže koja zadovoljava navedeni uslov.

   (b) Tačke sa x-koordinatom x_j se zamjenjuju tačkom sa x-koordinatom $\sum\limits_{i=1}^{2023} x_i - x_j$. Kako mreža ostaje ista, to je $\sum\limits_{j=1}^{2023} x_j = 2022 \sum\limits_{j=1}^{2023} x_j$, odnosno $\sum\limits_{j=1}^{2023} x_j = 0$. Dakle, tačka sa x koordinatom x_j se zamjenjuje tačkom sa x koordinatom $-x_j$. Bez gubljenja opštosti, neka je

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2022} \leq x_{2023}.$$

Kako mreža nakon navedenog postupka ostaje ista to je

$$x_1 = -x_{2023},$$

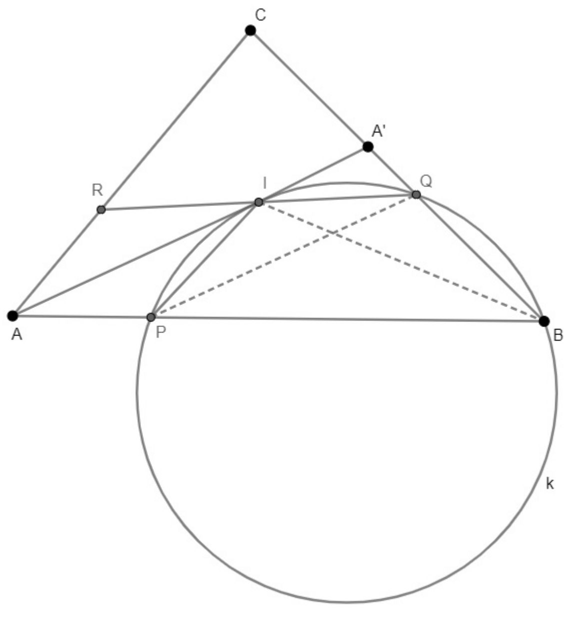
$$x_2 = -x_{2022},$$

$$\vdots$$

to jeste $x_k = -x_{2024-k}$. Specijalno $x_{1012} = -x_{1012}$, odnosno $x_{1012} = 0$. Analogno za y-koordinate. $\square$

4. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC. Neka je k kružnica koja sadrži tačke B i I, i AI je njena tangenta. Kružnica k siječe AB još u tački P i siječe BC još u tački Q. Prava QI siječe AC u tački R. Dokazati da je $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$.

Rješenje:



Važi sljedeći niz jednakosti uglova:

$$\begin{aligned}\angle AIP &= \angle IBP \text{ (ugao između tangente i tetive je jednak periferijskom uglu nad tetivom)}\\ &= \angle IBQ \text{ (BI je bisektrisa ugla $\angle ABC$)}\\ &= \angle IPQ \text{ (kao periferijski uglovi nad tetivom IQ).}\end{aligned} \tag{1}$$

pa je $AI \parallel PQ$. To dalje povlači

$$\begin{aligned}\angle IAB &= \angle BPQ\\ &= \angle BIQ \text{ (kao periferijski uglovi nad tetivom BQ).}\end{aligned}$$

Kako je $\angle AIP = \angle IBQ$ i $\angle IAP = \angle BIQ$, to su trouglovi AIP i IBQ slični pa važi

$$\frac{|QI|}{|BQ|} = \frac{|AP|}{|PI|}. \tag{2}$$

Neka je $A' = p(A, I) \cap p(B, C)$. Tada

$$\begin{aligned}\angle RIA &= \angle QIA' \text{ (kao unakrsni uglovi)}\\ &= \angle IPQ \text{ (ugao između tangente i tetive je jednak periferijskom uglu nad tetivom)}\\ &= \angle AIP \text{ (na osnovu 1).}\end{aligned}$$

Kako je AI bisektrisa $\angle BAC$ to je i $\angle PAI = \angle RAI$, pa iz USU stava slijedi da je $\triangle AIP \cong \triangle AIR$, što povlači

$$|AR| = |AP|. \tag{3}$$

Takođe važi $|QI| = |PI|$, jer je BI bisektrisa ugla PBQ. Uvrštavajući dobijeno u (2) konačno dobijamo

$$\frac{|PI|}{|BQ|} = \frac{|AR|}{|PI|},$$

odakle slijedi tražena relacija. $\square$